Você sabe o que é capitalização contínua?

***Entenda por que esse é um conceito relevante no mercado financeiro***

***\*Carlos Heitor Campani, Ph.D.***

Quando dizemos que a taxa SELIC é atualmente igual a 9,15% ao ano, estamos lidando com uma taxa em tempo discreto. Por exemplo, para determinar o fator de acumulação de um investimento que rende esta taxa diariamente, fazemos a conta abaixo:

Isso porque o mercado brasileiro convenciona que há sempre 252 dias úteis em um ano. Desta forma, o fator de acumulação diária e a taxa SELIC ao dia são calculados conforme abaixo:

%

Tanto a taxa SELIC ao ano quanto ao dia são taxas discretas e efetivas. São ditas efetivas porque se aplicam diretamente aos montantes envolvidos, sem pegadinhas. Uma taxa de juros não efetiva é dita nominal e essas precisam ser convertidas em taxas efetivas antes de serem aplicadas na prática. Como exemplo célebre, cito a poupança. Se você fizer uma rápida pesquisa online sobre “rendimento anual da poupança” é bem provável que você encontre 6% ao ano mais TR (quando a taxa SELIC estiver acima de 8,5%, o que é o caso atualmente). Mas esses “6% ao ano” são nominais porque, na realidade, são “6% ao ano capitalizados mensalmente”. E essa capitalização mensal (veja que a taxa da poupança também é discreta) faz a taxa ao ano ser nominal e precisar ser “transformada”.

Antes de mais nada, precisamos trazer a taxa “ao ano capitalizada mensalmente” para o mês e isso se faz de maneira bem simples: basta dividir 6% pelos 12 meses do ano, obtendo-se, assim, 0,5% ao mês. Essa taxa agora é efetiva porque é uma taxa ao mês capitalizada mensalmente. Se quisermos levá-la para o ano e calcular a taxa efetiva da poupança ao ano, além do fator de correção dado pela TR, temos de fazer a conta correta de acordo com os princípios da boa matemática financeira:

%

Nesse momento, você pode estar se perguntando: ué, mas a taxa SELIC não é uma taxa ao ano capitalizada diariamente? A resposta é sim. Então por que a taxa SELIC é uma taxa efetiva e a taxa da poupança não é? Simplesmente por uma convenção histórica de mercado. O mercado tem um acordo tácito de que uma é expressa de forma efetiva e a outra de forma nominal. Isso gera confusão para quem está entrando no mercado de trabalho? Naturalmente sim. Em minha opinião, deveríamos SEMPRE trabalhar com taxas efetivas e pronto, mas, infelizmente, nem sempre é assim. A saída é ficar de olho e fazer contas para testar se uma dada taxa (como por exemplo, em um empréstimo bancário) é efetiva ou nominal. Lembro que taxas nominais escondem taxas efetivas maiores, tal como no caso da poupança, onde os “6% ao ano capitalizados mensalmente” escondem cerca de 6,2% efetivos ao ano.

Agora que aprendemos a diferença entre taxas efetivas e taxas nominais, vamos ao conceito de uma taxa contínua e, ao final, prometo dar dois exemplos relevantes de aplicação no mercado. Suponha taxas discretas de 12% ao ano capitalizadas sequencialmente (i) ao mês, (ii) ao dia e (iii) a cada hora de um dia útil. Encontremos as taxas efetivas ao ano para cada um dos três casos:

12,68%

12,75%

12,75%

Percebeu como se faz a conta? Uma taxa nominal precisa ser levada para o seu período de capitalização, dividindo-a pelo número de períodos contidos no ano para depois aplicar esse mesmo número de períodos na potência do fator de acumulação. É verdade que quanto mais se capitaliza uma taxa nominal de juros, maior é a sua taxa efetiva equivalente. Mas o ponto interessante é que essa sequência é limitada e tem seu limite bastante conhecido na matemática. E é precisamente este limite que define a taxa de juros contínua. Tudo se passa como se o dinheiro fosse capitalizado continuamente, não a cada minuto ou a cada segundo, mas a cada instante.

A equação acima nos diz que uma taxa de 12% ao ano continuamente capitalizada (isto é, uma taxa de 12% ao ano contínua) equivale ao limite da sequência de cálculos iniciada acima (i, ii e iii) quando o número de capitalizações tende ao infinito. E, no exemplo anterior, podemos agora calcular esse limite como:

Isso equivale a dizer que 12% ao ano continuamente capitalizados corresponde a uma taxa discreta efetiva de 12,75% ao ano. Lidar com taxas contínuas exclui a possibilidade da confusão das taxas nominais, pois, por definição, uma taxa contínua será sempre uma taxa efetiva, tendo em vista que o período de capitalização está bem definido (a todo instante). Além disso, lidar com taxas contínuas é matematicamente mais simples por conta das propriedades da função exponencial. Tomemos como exemplo uma taxa contínua de 24% ao ano. Quais são os fatores de acumulação para 1 ano, 5 anos, 6 meses e um mês? Cálculos abaixo.



Perceberam como tudo se passa? Basta ajustar linearmente o expoente. Taxas contínuas não são muito utilizadas diretamente no mercado brasileiro, mas funcionam formidavelmente em modelos contínuos de precificação. Um exemplo relevante onde essas taxas aparecem diz respeito às curvas de juros disponibilizadas diariamente pela ANBIMA. Muitos não sabem, mas como essas curvas são baseadas em modelos contínuos de juros, elas representam taxas contínuas. Se forem utilizadas na prática, precisam ser transformadas em taxas discretas (fórmula iv acima) ou a fórmula de valor do dinheiro no tempo precisa ser conforme abaixo:

Uma outra aplicação prática de taxa contínua de juros bastante usual no mercado, mesmo no Brasil, é a fórmula de Black & Scholes para precificação de opções financeiras. Na fórmula, se faz necessário utilizar a taxa livre de risco. E aí compartilho com vocês dois erros muito comuns que já vi, inclusive em calculadoras disponibilizadas por algumas casas.

O primeiro erro é que a taxa livre de risco não pode ser a taxa SELIC atual (ou seja, de 9,15%) muito menos a sua meta (9,25%). Precisamos trabalhar com a curva de juros (por exemplo, disponibilizada pela ANBIMA) e, mais especificamente, com a taxa livre de risco válida para o mesmo prazo da opção sendo precificada. E o segundo ponto de atenção é que, pelo fato do modelo de Black & Scholes ter sido desenvolvido em tempo contínuo, essa taxa de juros livre de risco precisa ser contínua! Desta maneira, precisamos transformar uma eventual taxa discreta em sua forma contínua, conforme desenvolvimento da fórmula iv acima apresentada, a saber:

O lado bom é que, como vimos, as taxas provenientes da curva ANBIMA já são contínuas e, portanto, podem ser utilizadas diretamente na fórmula de Black & Scholes. Mas se você utilizar taxas provenientes de outras fontes, certifique-se de utilizar uma taxa contínua na fórmula de Black & Scholes.

Achou bacana esse texto? Comente em minhas redes sociais. Isso ajuda o artigo a ter mais visibilidade e, principalmente, ajuda a mais pessoas terem acesso a esse conteúdo. Aliás, vamos nos conectar nas redes sociais @carlosheitorcampani. Meu intuito é compartilhar muita educação financeira, contribuindo para o avanço do conhecimento para todos, sempre de forma absolutamente democrática.

Forte e respeitoso abraço.

***\* Carlos Heitor Campani é PhD em Finanças, Diretor Acadêmico da iluminus – Academia de Finanças e sócio fundador da CHC Finance. Ele pode ser encontrado em*** [***www.carlosheitorcampani.com***](http://www.carlosheitorcampani.com) ***e nas redes sociais: @carlosheitorcampani.***